12.10.20

- **Η διαφορική εξίσωση n-τάξης:**

$g(x, y(x), y'(x), \dots, y^{n}(x)) = 0 \ , \ x \in I \quad (E)$

$g(x, z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) : I \times D \ , \ x \in I \ , \ D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

Πχ $y^{(4)}(t) + 2t^2 \sin t \, y(t) + 3y''(t) = e^{y(t)} + 2t + 1$

$y^{(4)}(t) + 2t^2 \sin t \, y(t) + 3y''(t) - e^{y(t)} - 2t - 1 = 0$

$y : z_1, \ y' : z_2, \ y'' : z_3, \ y''' : z_4, \ y^{(4)} : z_5$

$g(t, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = z_5 + 2t^2 \sin t \, z_1 + 3z_3 - e^{z_1} - 2t - 1$

Πχ $y^{(4)}(t) + \dfrac{2t^2 \sin t}{y^2(t) + 5} y'''(t) - 2y'(t) = y(t) + 2t + 1$

- **Η μορφή:**

$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \ , \ x \in I \quad (E)$

$f(x, z_1, z_2, \dots, z_n) : I \times D \ , \ x \in I \ , \ D \subseteq \mathbb{R}^n$

Λύση της ΔΕ (Ε) στο Ι: $y \in C^{(n)}(I, \mathbb{R})$ που ικανοποιεί την (Ε) $\forall x \in I$

Πχ Η εξίσωση $y(t) = \cos 2t, \ t \in \mathbb{R}$ είναι μια λύση της εξίσωσης.

$y''(t) + 4y(t) = 0 \ , \ t \in \mathbb{R}$

- **Η εξίσωση πρώτης τάξης:**

$y'(t) = f(t, y(t)) \ , \ t \in I$

Πχ $y'(x) = \dfrac{2x + 1}{2\cos^2(y(x)) + 1} \ , \ x \in [2, 2020]$

- **Σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης:**

$$\left.\begin{aligned} y_1'(t) &= f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)),\ t\in I \\ y_2'(t) &= f_2(t, y_1(t), \dots, y_n(t)),\ t\in I \\ &\dots \\ y_n'(t) &= f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)),\ t\in I \end{aligned}\right\} \text{ με } f_i: I\to \mathbb{R} \text{ συνεχείς στο } I$$

- **Λύση του συστήματος εξισώσεων πρώτης τάξης:**

$(y_1, \dots, y_n)$: $y_i \in C^1(I)$, $i=1,\dots,n$ ικανοποιεί το σύστημα $\forall t\in I$.

Πχ

$$y_1'(t) = 2t y_1(t) - \cos t\, y_2(t) + e^{y_3(t)}$$
$$y_2'(t) = y_2(t) - y_3^2(t)$$
$$y_3'(t) = (3t+1) y_1(t) - 2y_2(t) + \sqrt{y_3(t)}$$

$\boxed{\text{Παρατήρηση}}$: Αν θέσουμε

$$\bar{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \bar{f}(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ f_2(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ \dots \\ f(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \end{pmatrix}$$

τότε το σύστημα διαφ. εξισώσεων πρώτης τάξης

- **Η (μη ομογενής) γραμμική διαφ. εξίσωση n-τάξης.**

$a_n(t) y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t) y'(t) + a_0(t) y(t) = 0$, $t\in I$

$b, a_i \in C(I)$, $i=0,\dots,n$, $a_n(t) \neq 0$, $\forall t\in I$

Πχ $3y''(t) + 5y'(t) - 2y(t) = e^{2t+1}$, $t\in\mathbb{R}$

$\boxed{\text{Παρατήρηση}}$: Για $y_1 = y$, $y_2 = y' = y_1'$, $y_3 = y'' = y_2'$, $\dots$, $y_n = y^{(n-1)} = y_{n-2}'$

Η γρ. διαφ. εξίσωση n-τάξης:

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b(t)$

$t\in I$, $b, a_i \in C(I)$, $i=0,\dots,n$, $a_n(t) \neq 0$ $\forall t\in I$

γράφεται ως:

$y_1' = y_2$
$y_2' = y_3$
$\cdots$
$y_{n-1}' = y_n$
$y_n' = -\frac{a_{n-1}}{a_n} y_{n-1} - \ldots - \frac{a_0}{a_n} y_1 + \frac{b}{a_n}$

καθώς και ως διανυσματική εξίσωση πρώτης τάξης της μορφής:
$\bar{y}'(t) = A(t)\bar{y}(t) + \bar{b}(t), \ t \in I$
με A συνεχή πίνακα $n \times n$ και $b(t)$ συνεχή διανυσματική συνάρτηση

- **Η γ.δ. εξίσωση n-τάξης με σταθερούς συντελεστές: γράφεται όπως τη μη ομογενή γρ. διαφ. εξ. n-τάξης.**

- Άλλες μορφές δ.ε.:
  - Εξισώσεις με υστέρηση/προώθηση
    $y'(t) = f(t, y(\tau(t))), \ t \geq 0$

Πχ $y'(t) = p(t)y(t-r) = 0, \ r > 0, \ t \geq 0$

  - Εξισώσεις με μερικές παραγώγους:
    $y(t,x), y_t(t,x), y_x(t,x), y_{tx}(t,x), y_{tt}(t,x), y_{xx}(t,x)$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ:

(1) Η παράγωγος ως ρυθμός μεταβολής:
$f'(t) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$

Πχ Ταχύτητα, επιτάχυνση κινητού
$\bar{u}(t) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}, \ \bar{\gamma} = \frac{u(t_2) - u(t_1)}{t_2 - t_1}$
$u(t) = \lim_{t \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = x'(t)$

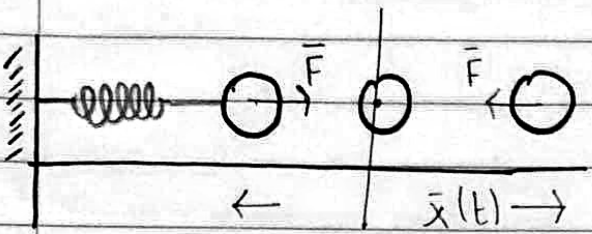
$$\gamma(t) = \lim_{t \to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} = u'(t) = x''(t)$$

(2) Η εξίσωση του ελατηρίου.

$F(t) = -kx(t)$ (Hook)

$F(t) = m\gamma(t) = mx''(t) = -kx(t)$, $t \geq 0$

$mx''(t) + kx(t) = 0$, $t \geq 0$



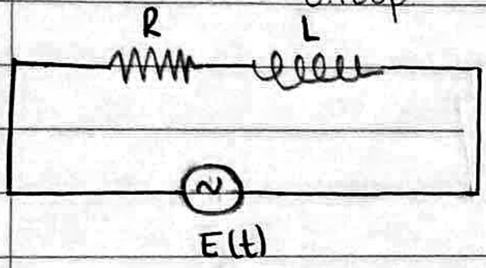
$\bar{F}(t) = -k\bar{x}(t)$

$F(t) = m\ddot{x}(t) = -kx(t)$

$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$

θ.loop

(3)



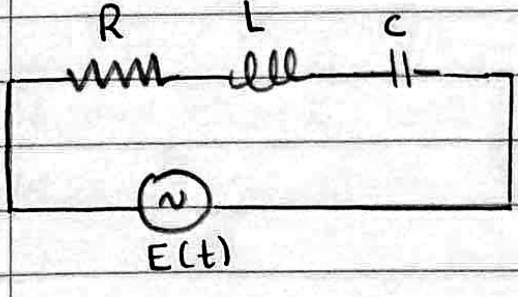
$LI'(t) + RI(t) = E(t)$

Αντίσταση(ΛΛΛ): $E_R(t) = RI(t)$

Πηνίο(ΜΜ): $E_L(t) = L\frac{dI(t)}{dt} = LI'(t)$

Πυκνωτής (-||-): $E_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$

$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = Q'(t)$



$LI'(t) + RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = E(t)$

$LQ''(t) + RQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = E(t)$

(3) Ricatti: $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$

(4) Euler: $y = y_1 + z^{-1}$

(5) D'Alembert: $y = xq(y') + f(y')$

(6) Euler: $(1-x^4)^{1/2}y' + (1-y^4)^{1/2} = 0$

(7) Clairat: $y = xy' + f(y')$, $p = y'$ $\rightsquigarrow$ $y = cx + f(c)$

(8) Darboux: $N(xdy - ydx) - Ldy + Mdx = 0$